

University of Groningen

## Dilatations des commutants d'opérateurs pour des espaces de Krein de fonctions analytiques

Alpay, Daniel

*Published in:*  
Annales de L'Institut Fourier

*DOI:*  
[10.5802/aif.1200](https://doi.org/10.5802/aif.1200)

**IMPORTANT NOTE:** You are advised to consult the publisher's version (publisher's PDF) if you wish to cite from it. Please check the document version below.

*Document Version*  
Publisher's PDF, also known as Version of record

*Publication date:*  
1989

[Link to publication in University of Groningen/UMCG research database](#)

*Citation for published version (APA):*

Alpay, D. (1989). Dilatations des commutants d'opérateurs pour des espaces de Krein de fonctions analytiques. *Annales de L'Institut Fourier*, 39(4), 1073-1094. <https://doi.org/10.5802/aif.1200>

### Copyright

Other than for strictly personal use, it is not permitted to download or to forward/distribute the text or part of it without the consent of the author(s) and/or copyright holder(s), unless the work is under an open content license (like Creative Commons).

The publication may also be distributed here under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license. More information can be found on the University of Groningen website: <https://www.rug.nl/library/open-access/self-archiving-pure/taverne-amendment>.

### Take-down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

*Downloaded from the University of Groningen/UMCG research database (Pure): <http://www.rug.nl/research/portal>. For technical reasons the number of authors shown on this cover page is limited to 10 maximum.*

DANIEL ALPAY

## **Dilatations des commutants d'opérateurs pour des espaces de Krein de fonctions analytiques**

*Annales de l'institut Fourier*, tome 39, n° 4 (1989), p. 1073-1094

[<http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1989\\_\\_39\\_4\\_1073\\_0>](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1989__39_4_1073_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1989, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# DILATATIONS DES COMMUTANTS D'OPÉRATEURS POUR DES ESPACES DE KREIN DE FONCTIONS ANALYTIQUES

par Daniel ALPAY

---

## 1. Introduction.

Le théorème de dilatation des commutants d'opérateurs ([26], [27], [28] ; voir aussi [23]) décrit certaines extensions d'une contraction donnée entre deux espaces de Hilbert. Plus précisément, soient  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{H}'$  deux espaces de Hilbert et soit  $A$  une contraction de  $\mathcal{H}$  dans  $\mathcal{H}'$ . Soient de plus  $T$  et  $T'$  deux contractions dans  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$  et  $\mathcal{L}(\mathcal{H}')$  telles que

$$(1.1) \quad T'A = AT$$

et soient  $U$  et  $U'$  les dilatations minimales isométriques de  $T$  et  $T'$  (dans les espaces de Hilbert  $\mathcal{H}_1 \supset \mathcal{H}$  et  $\mathcal{H}'_1 \supset \mathcal{H}'$ ). Le théorème énonce alors qu'il existe une contraction  $B$  de  $\mathcal{H}_1$  dans  $\mathcal{H}'_1$  telle que

$$(1.2) \quad U'B = BU$$

et

$$(1.3) \quad P_{\mathcal{H}'} B|_{\mathcal{H}} = A$$

(tous les opérateurs considérés sont linéaires et  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$  désigne l'espace des opérateurs linéaires continus de  $\mathcal{H}$  dans  $\mathcal{H}$  ;  $P_{\mathcal{H}'}$  dénote la projection orthogonale sur  $\mathcal{H}'$  et  $B|_{\mathcal{H}}$  la restriction de  $B$  à l'espace  $\mathcal{H}$ ).

*Mots-clés* : Commutants d'opérateurs - Espaces de Krein de fonctions analytiques.

*Classification A.M.S.* : 47A20 - 47B50 - 46D05 - 46E20.

La condition (1.3) s'écrit aussi

$$(1.4) \quad B^*|_{\mathcal{H}'} = A^*$$

et donc  $B^*$  est une extension de  $A^*$  ( $A^*$  dénote l'adjoint de l'opérateur  $A$ ).

Le théorème a des applications à la théorie de l'interpolation des fonctions analytiques ([22], [23]) et la description de toutes les solutions contractives  $B$  satisfaisant (1.2) (1.3) est implicitement liée à l'algorithme de Schur (par l'utilisation des « choice sequences » ([6], [18], [19])). Par ailleurs, dans [3], une étude de l'algorithme de Schur ([24]) a été faite en utilisant la théorie de de Branges des espaces hilbertiens de fonctions analytiques à noyau reproduisant ([12], [13]).

Le but du présent travail est de clarifier les liens entre la théorie de de Branges et le théorème de dilatation des commutants d'opérateurs et, en particulier de démontrer une version de ce théorème pour certains espaces de Krein de fonctions analytiques.

Avant de décrire le cadre dans lequel nous travaillerons, rappelons que, dans le cas de l'espace de Hilbert, un opérateur est une contraction si et seulement si son adjoint est une contraction ; d'autre part une contraction est toujours continue. Dans le cas d'espaces de Krein la situation est plus délicate : la continuité n'est pas une conséquence de la contractivité et, pour des opérateurs continus, (au moins) trois approches sont possibles. On peut considérer des opérateurs contractifs, bicontractifs (c'est-à-dire contractifs et dont l'adjoint est contractif ; la définition de l'adjoint est rappelée à la fin de l'introduction) ou bien des opérateurs dont seulement l'adjoint est contractif. Plus généralement, si  $A$  est un opérateur continu de l'espace de Krein  $\mathcal{H}$  dans l'espace de Krein  $\mathcal{H}'$ , on peut définir les formes hermitiennes  $[\cdot, \cdot]_A$  et  $[\cdot, \cdot]_{A^*}$  par

$$(1.5) \quad [f, g]_A = [f, g]_{\mathcal{H}} - [Af, Ag]_{\mathcal{H}'}$$

et

$$(1.6) \quad [f, g]_{A^*} = [f, g]_{\mathcal{H}'} - [A^*f, A^*g]_{\mathcal{H}}$$

(où  $[\cdot, \cdot]_{\mathcal{H}}$  est le produit scalaire indéfini dans  $\mathcal{H}$ ) et fixer le nombre de carrés négatifs de la forme (1.5), de la forme (1.6) ou bien des deux formes.

L'école roumaine ([6]) étudie les théorèmes de dilatation des commutants d'opérateurs pour des opérateurs  $A$  tels que la forme (1.5) a un nombre fini de carrés négatifs, et M. Dritschel ([17]) étudie le cas de bicontractions (c'est-à-dire lorsque les formes hermitiennes (1.5) et (1.6) sont positives). Nous considérerons ici le cas d'opérateurs pour lesquels la forme (1.6) a un nombre fini de carrés négatifs; nous noterons par  $\nu_A$  ce nombre. Les opérateurs agiront entre des espaces de Krein de fonctions analytiques dans le disque unité à valeurs dans un espace vectoriel (d'une manière générale l'espace  $\mathbb{C}_n$ ,  $n > 0$ , des vecteurs colonnes à  $n$  entrées complexes) et invariants pour l'opérateur de déplacement à gauche  $R_0$  défini par

$$(1.7) \quad (R_0 f)(z) = \frac{f(z) - f(0)}{z}.$$

Pour le problème de dilatation de commutants d'opérateurs considéré ici,  $T = T' = R_0^*$  dans (1.1), et nous cherchons les extensions  $B^*$  de  $A^*$  pour lesquelles la forme hermitienne  $[\cdot, \cdot]_{A^*}$  a encore  $\nu_A$  carrés négatifs.

Notre approche est différente des méthodes utilisées dans [6] et [17]. Nous supposons que le graphe de l'opérateur  $A^*$ , muni de la forme hermitienne  $[\cdot, \cdot]_{A^*}$ , est un espace de Pontryagin à noyau reproduisant dont le noyau est de la forme

$$(1.8) \quad \frac{J - \Theta(z)J\Theta^*(\omega)}{1 - z\omega^*}$$

où  $J$  est la matrice

$$(1.9) \quad \begin{pmatrix} I_{n_2} & 0 \\ 0 & -I_{n_1} \end{pmatrix}$$

(si les éléments de  $\mathcal{K}_1$  (resp.  $\mathcal{K}_2$ ) sont à valeurs dans  $\mathbb{C}_{n_1}$  (resp.  $\mathbb{C}_{n_2}$ )) et où  $\Theta$  est une fonction analytique dans le disque unité sur laquelle nous ferons certaines hypothèses.

Cette condition sur le graphe de  $A^*$  est suggérée par de précédentes études ([1], [2]) liées à la théorie de de Branges ([12], [13]). Il est à noter que les graphes d'opérateurs apparaissent déjà dans le travail de Ball et Helton (voir [10]).

L'exposé est divisé en cinq sections: l'introduction contient, outre la description de l'objet du travail, les principales notations et quelques rappels sur les espaces de Krein. La seconde section est consacrée à

divers rappels sur la théorie de de Branges et sur les espaces à noyau reproduisant. Nous y avons aussi inclus une interprétation de l'algorithme de Schur en termes de ces espaces. La troisième partie décrit l'approche choisie au théorème de relèvement commutatif. La version présentée du théorème est énoncée et démontrée dans la quatrième section. La cinquième section contient quelques remarques sur les extensions possibles du travail.

Rappelons maintenant quelques définitions sur les formes hermitiennes et les espaces de Krein.

Soit  $\mathcal{K}$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$ , muni d'une forme hermitienne  $[\cdot, \cdot]_{\mathcal{K}}$ . Les vecteurs  $x$  et  $y$  de  $\mathcal{K}$  sont orthogonaux si  $[x, y]_{\mathcal{K}} = 0$ , et les sous-espaces  $V$  et  $W$  de  $\mathcal{K}$  sont orthogonaux si chaque vecteur de  $V$  est orthogonal à chaque vecteur de  $W$ . L'orthogonalité sera désignée par le signe  $\perp$  ( $x \perp y, V \perp W$ ). Un sous-espace  $V$  de  $\mathcal{K}$  est positif (resp. négatif, resp. neutre) si  $[x, x]_{\mathcal{K}} \geq 0$  (resp.  $[x, x]_{\mathcal{K}} \leq 0$ , resp.  $[x, x]_{\mathcal{K}} = 0$ ) pour tout  $x$  dans  $V$ .

L'espace  $\mathcal{K}$  muni de la forme  $[\cdot, \cdot]_{\mathcal{K}}$  est un espace de Krein si  $\mathcal{K}$  admet la décomposition  $\mathcal{K} = \mathcal{K}_+ + \mathcal{K}_-$  où  $\mathcal{K}_+$  et  $\mathcal{K}_-$  satisfont aux conditions suivantes :

a)  $\mathcal{K}_+ \perp \mathcal{K}_-$  ;

b)  $\mathcal{K}_+ \cap \mathcal{K}_- = \{0\}$  ;

c)  $\mathcal{K}_+$  muni de  $[\cdot, \cdot]_{\mathcal{K}}$  et  $\mathcal{K}_-$  muni de  $-[\cdot, \cdot]_{\mathcal{K}}$  sont des espaces de Hilbert.

Tout élément  $x$  de  $\mathcal{K}$  possède alors une décomposition unique  $x = x_+ + x_-$ ,  $x_{\pm} \in \mathcal{K}_{\pm}$  et la forme  $\langle x, x \rangle_{\mathcal{K}} = [x_+, x_+]_{\mathcal{K}} - [x_-, x_-]_{\mathcal{K}}$  est définie positive. L'espace  $\mathcal{K}$  muni de  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{K}}$  est un espace de Hilbert.

La topologie induite par la forme  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{K}}$  sera la topologie considérée pour l'espace de Krein. La décomposition  $\mathcal{K} = \mathcal{K}_+ + \mathcal{K}_-$  n'est pas en général unique, mais toutes les topologies associées sont équivalentes. Un espace de Pontryagin sera un espace de Krein tel que  $\dim \mathcal{K}_- < \infty$  et  $\dim \mathcal{K}_-$  sera appelée l'ordre de l'espace.

La forme hermitienne  $[\cdot, \cdot]_{\mathcal{K}}$  sera aussi appelée produit scalaire ou produit scalaire indéfini. Nous noterons l'espace de Krein  $\mathcal{K}$  muni du produit scalaire  $[\cdot, \cdot]_{\mathcal{K}}$  comme la paire  $(\mathcal{K}, [\cdot, \cdot]_{\mathcal{K}})$ .

Soit  $A$  un opérateur continu de l'espace de Krein  $(\mathcal{K}_1, [\cdot, \cdot]_{\mathcal{K}_1})$  dans l'espace de Krein  $(\mathcal{K}_2, [\cdot, \cdot]_{\mathcal{K}_2})$ . L'opérateur  $A^*$ , l'adjoint de  $A$ , est

l'opérateur continu tel que

$$[Ax, y]_{\mathcal{X}_2} = [x, A^*y]_{\mathcal{X}_1}.$$

Nous renvoyons le lecteur au livre de Boggar ([11]) pour une étude détaillée des espaces de Krein et de leurs opérateurs.

Quelques mots sur la notation:  $\mathbb{C}_p$  a déjà été introduit et  $\mathbb{C}_{p \times q}$  désigne l'espace vectoriel des matrices à entrées complexes avec  $p$  lignes et  $q$  colonnes. Ces espaces seront en général munis du produit scalaire euclidien  $\langle A, B \rangle = \text{Tr } AB^*$ . L'identité dans  $\mathbb{C}_{p \times p}$  sera notée  $I_p$  ou bien  $I$ . De manière analogue nous définissons  $H_{p \times q}^2, \dots$  pour les espaces de Hardy  $H^2$  et  $H^\infty$  ([20]). Le produit scalaire euclidien dans  $H_{p \times q}^2$  sera

$$\langle f, g \rangle_{H_{p \times q}^2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{Tr}(g^*(e^{it})f(e^{it})) dt.$$

$\mathbb{D}$  désignera le disque ouvert unité et  $\mathbb{T}$  le cercle unité. La fin d'une démonstration sera marquée par le symbole  $\square$ .

## 2. Espaces à noyau reproduisant et algorithme de Schur.

Soit  $K(z, \omega)$  une fonction à valeurs dans  $\mathbb{C}_{n \times n}$ , définie pour  $z$  et  $\omega$  dans un ensemble  $\Omega$  donné. Cette fonction a  $v$  carrés négatifs si pour tout entier  $p$ , tout choix d'éléments  $\omega_1, \dots, \omega_p$  dans  $\Omega$  et  $c_1, \dots, c_p$  dans  $\mathbb{C}_n$ , la forme hermitienne

$$\sum_{i,j=1}^p \alpha_i \alpha_j^* c_i^* K(\omega_i, \omega_j) c_j \quad (\alpha_i \in \mathbb{C}, i=1, \dots, p)$$

a au plus  $v$  carrés négatifs, et exactement  $v$  carrés négatifs pour un certain choix de  $p, \omega_1, \dots, \omega_p, c_1, \dots, c_p$ . Si  $v = 0$  la fonction  $K$  est dite positive.

Par un résultat de Sorjonen, ([25]), qui généralise au cas  $v < \infty$  le cas  $v = 0$  considéré par E.H. Moore ([5]), il existe alors un espace de Pontryagin d'ordre  $v$ ,  $\mathcal{P}$ , dont les éléments sont des fonctions à valeurs dans  $\mathbb{C}_n$ , avec les propriétés suivantes :

- Pour tout  $\omega$  dans  $\Omega$  et  $c$  dans  $\mathbb{C}_n$ , la fonction  $K_\omega c : z \rightarrow K(z, \omega)c$  appartient à  $\mathcal{P}$ ,
- Pour tout élément  $f$  de  $\mathcal{P}$ ,  $\omega$  dans  $\Omega$  et  $c$  dans  $\mathbb{C}_n$ ,

$$(2.1) \quad [f, K_\omega c]_{\mathcal{P}} = c^* f(\omega).$$

L'espace  $\mathcal{P}$  est uniquement déterminé par les conditions a) et b) et est appelé espace à noyau reproduisant. La fonction  $K$  est le noyau reproduisant de  $\mathcal{P}$  et est unique.

Dans ce travail nous utiliserons des fonctions  $K(z, \omega)$  de la forme (1.8) (1.9) où la fonction  $\Theta$  satisfait les hypothèses suivantes :

$H1$  :  $\Theta$  est dans  $H_{n \times n}^\infty$

$H2$  :  $\Theta$  est  $J$ -unitaire : pour presque tout  $t \in [0, 2\pi]$  (au sens de la mesure de Lebesgue)

$$\Theta(e^{it})J\Theta^*(e^{it}) = J$$

où  $\Theta(e^{it})$  désigne la limite radiale  $\lim_{p \rightarrow 1} \Theta(pe^{it})$ , qui existe pour presque tout  $t$  grâce à  $H1$  (voir [20]).

Ces hypothèses sont assez restrictives. Néanmoins elles sont satisfaites dans beaucoup de situations rencontrées en théorie de l'interpolation (souvent, même, la fonction  $\Theta$  sera de plus rationnelle ou entière).

Nous désignerons par le symbole  $\mathcal{P}_J^\nu$  l'ensemble des fonctions  $\Theta$  qui satisfont aux conditions  $H1$  et  $H2$ , la fonction (1.8) ayant  $\nu$  carrés négatifs et par  $\mathcal{P}(\Theta)$  l'espace de Pontryagin associé. Remarquons que  $\Theta$  est uniquement déterminée par  $\mathcal{P}(\Theta)$ , à une constante multiplicative  $J$ -unitaire près à droite. Le cas  $\nu = 0$  est intéressant ; en particulier, une fonction est dans  $\mathcal{P}_J^0$  si et seulement si elle est  $J$ -contractive :

$$\Theta(z)J\Theta^*(z) \leq J, \quad z \in \mathbb{D}$$

(voir [2]).

Ces fonctions apparaissent comme fonctions caractéristiques en théorie des opérateurs [15] et ont été étudiées par Potapov [21].

Les espaces  $\mathcal{P}(\Theta)$  ont été introduits et étudiés par de Branges ([12], [13]) pour le cas  $\nu = 0$  et lorsque les fonctions sont  $J$ -contractives dans le demi plan supérieur plutôt que le disque. J. Rovnyak a considéré le cas  $\nu = 0$  dans le cas de fonctions  $J$ -contractives dans le disque unité (voir l'article de J. Ball [9]). Le cas  $\nu > 0$  a été considéré dans [3].

Définissons  $H_J^2$  comme l'espace  $H_n^2$  muni du produit scalaire indéfini

$$[f, g]_{H_J^2} = \langle f, Jg \rangle_{H_J^2}$$

**THÉORÈME 2.1.** — Soit  $\Theta$  un élément de  $\mathcal{P}_J^\nu$  et soit  $\mathcal{P}(\Theta)$  l'espace de Pontryagin associé. L'espace  $\mathcal{P}(\Theta)$  est inclus isométriquement dans



$H_J^2$ . Plus précisément,

$$(2.2) \quad H_J^2 = \mathcal{P}(\Theta) \oplus \Theta H_J^2$$

où  $\oplus$  désigne une somme directe et orthogonale.

*Démonstration.* — Puisque la fonction  $\Theta$  est à entrées dans  $H^\infty$  et est  $J$ -unitaire sur le cercle unité, la multiplication par  $\Theta$  est une isométrie continue dans  $H_J^2$ . Par le Théorème 3.8, p. 126 de [11],  $\Theta H_J^2$  admet donc un complément orthogonal  $M$  dans  $H_J^2$ :

$$H_J^2 = M \oplus \Theta H_J^2.$$

Soit  $K(z, \omega)$  la fonction définie en (1.8). Il est aisé de voir que  $K_\omega c : z \rightarrow K(z, \omega)c$  appartient à  $M$  pour tout  $\omega$  dans  $\mathbb{D}$  et  $c$  dans  $\mathbb{C}_n$ . De plus, utilisant la formule de Cauchy et le fait que  $M$  est orthogonal à  $\Theta H_J^2$ , nous avons, pour  $f$  dans  $M$  (et avec  $\rho_\omega(z) = 1 - z\omega^*$ ),

$$\begin{aligned} [f, K_\omega c]_M &= [f, K_\omega c]_{H_J^2} \\ &= \left[ f, \frac{Jc}{\rho_\omega} \right]_{H_J^2} - \left[ f, \frac{\Theta(\cdot)J\Theta^*(\omega)c}{\rho_\omega} \right]_{H_J^2} \\ &= c^*f(\omega). \end{aligned}$$

L'espace  $M$  a donc  $K(z, \omega)$  comme noyau reproduisant. Par unicité de l'espace de Pontryagin associé à  $K(z, \omega)$  nous obtenons  $M = \mathcal{P}(\Theta)$ .  $\square$

Le cas où  $\Theta$  est de plus rationnelle est important; ces fonctions ont été étudiées dans [3], [4] et [16].

Un exemple élémentaire de fonction rationnelle dans la classe  $\mathcal{P}_J^0$  et qui jouera un rôle important par la suite est

$$(2.3) \quad \Theta(z) = H(\rho) \begin{bmatrix} zI_{n_2} & 0 \\ 0 & I_{n_1} \end{bmatrix}$$

où  $\rho$  est un élément de  $\mathbb{C}_{n_2 \times n_1}$  de norme strictement inférieure à l'unité et où  $H(\rho)$ , l'extension de Halmos de  $\rho$ , est définie par

$$(2.4) \quad H(\rho) = \begin{pmatrix} (I_{n_2} - \rho\rho^*)^{-\frac{1}{2}} & \rho(I_{n_1} - \rho^*\rho)^{-\frac{1}{2}} \\ \rho^*(I_{n_2} - \rho\rho^*)^{-\frac{1}{2}} & (I_{n_1} - \rho^*\rho)^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}.$$

La fonction  $\Theta$  est dans  $\mathcal{P}_J^0$ , et l'espace  $\mathcal{P}(\Theta)$  associé est un espace de Hilbert de dimension  $n_2$  :

$$\mathcal{P}(\Theta) = \left\{ f: f(z) = \frac{\begin{bmatrix} I_{n_2} \\ \rho^* \end{bmatrix} c}{1 - z\omega^*}, c \in \mathbb{C}_{n_2} \right\}$$

(voir par exemple [3]).

En particulier,  $\mathcal{P}(\Theta)$  est le graphe de la contraction  $K$  de  $H_{n_2}^2 \ominus BH_{n_2}^2$  dans  $H_{n_1}^2 \ominus BH_{n_1}^2$   $\left( B(z) = \frac{z - \omega}{1 - z\omega^*} \right)$  définie par  $K \frac{c}{\rho_\omega} = \frac{\rho^* c}{\rho_\omega}$ .

Plus généralement, soit  $\Theta$  dans  $\mathcal{P}_J^v$  et soit  $f = \begin{pmatrix} f_2 \\ f_1 \end{pmatrix}$  dans  $\mathcal{P}(\Theta)$  où  $f_2$  est à valeurs dans  $\mathbb{C}_{n_2}$ . Nous dirons que  $\mathcal{P}(\Theta)$  est le graphe d'un opérateur si

$$f_2(z) = 0, \quad \forall z \in \mathbb{D} \Rightarrow f(z) = 0, \quad \forall z \in \mathbb{D}.$$

Nous aurons besoin des résultats suivants.

**THÉOREME 2.2.** — Soient  $\rho_0, \dots, \rho_M$  des éléments de  $\mathbb{C}_{n_2 \times n_1}$  de normes strictement inférieures à l'unité et soient  $\Theta_0, \dots, \Theta_M$  les éléments de  $\mathcal{P}_J^0$  associés par la formule (2.3). La fonction  $\Theta_0 \dots \Theta_M$  est dans  $\mathcal{P}_J^0$  et

$$(2.5) \quad \mathcal{P}(\Theta_0 \dots \Theta_M) = \mathcal{P}(\Theta_0) \oplus \Theta_0 \mathcal{P}(\Theta_1) \oplus \Theta_0 \Theta_1 \mathcal{P}(\Theta_2) \\ \oplus \dots \oplus \Theta_0 \dots \Theta_{M-1} \mathcal{P}(\Theta_M).$$

*Démonstration.* — Il est clair que la fonction  $\Theta = \Theta_0 \dots \Theta_M$  est analytique dans  $\mathbb{D}$  et  $J$ -unitaire. De plus, chaque  $\Theta_i$  étant  $J$ -contractive, le produit  $\Theta_0 \dots \Theta_M$  est aussi  $J$ -contractif et donc dans  $\mathcal{P}_J^0$ .

La fonction positive (1.8) se décompose en une somme de  $M$  fonctions positives

$$\frac{J - \Theta(z)J\Theta^*(\omega)}{1 - z\omega^*} = \frac{J - \Theta_0(z)J\Theta_0^*(\omega)}{1 - z\omega^*} \\ + \Theta_0(z) \frac{J - \Theta_1(z)J\Theta_1^*(\omega)}{1 - z\omega^*} \Theta_0^*(\omega) + \dots \\ \dots + \Theta_0(z) \dots \Theta_{M-1}(z) \frac{J - \Theta_M(z)J\Theta_M^*(\omega)}{1 - z\omega^*} \Theta_{M-1}^*(\omega) \dots \Theta_0^*(\omega).$$

Cette décomposition assure que, en tant qu'espaces vectoriels,

$$\mathcal{P}(\Theta) = \mathcal{P}(\Theta_0) + \Theta_0 \mathcal{P}(\Theta_1) + \dots + \Theta_0 \dots \Theta_{M-1} \mathcal{P}(\Theta_M)$$

(voir [5], Théorème p. 353).

Comme ces espaces sont de plus orthogonaux deux à deux, la somme est une somme directe, ce qui termine la démonstration.  $\square$

**THÉOREME 2.3.** — Soient  $\Theta_0, \dots, \Theta_M$  comme dans le théorème précédent. L'espace  $\mathcal{P}(\Theta_0 \dots \Theta_M)$  est le graphe d'une contraction de  $H_{n_2}^2 \ominus z^{M+1}H_{n_2}^2$  dans  $H_{n_1}^2 \ominus z^{M+1}H_{n_1}^2$ . Cette contraction commute avec l'opérateur  $R_0$ .

*Démonstration.* — Chaque  $\mathcal{P}(\Theta_i)$  est un graphe d'opérateur et donc aussi  $\mathcal{P}(\Theta_0 \dots \Theta_M)$ , grâce à l'égalité (2.5). Soit  $K_M$  telle que chaque élément de  $\mathcal{P}(\Theta_0 \dots \Theta_m)$  s'écrive

$$F = \begin{bmatrix} f \\ K_M f \end{bmatrix}.$$

Nous avons

$$[F, F]_{H_J^2} = \langle f, f \rangle_{H_{n_2}^2} - \langle K_M f, K_M f \rangle_{H_{n_1}^2} \geq 0$$

puisque  $\mathcal{P}(\Theta_0 \dots \Theta_M)$  est un espace de Hilbert. On en déduit que  $K_M$  est une contraction. Il reste à démontrer que le domaine de  $K_M$  est  $H_{n_2}^2 \ominus z^{M+1}H_{n_2}^2$  et son image incluse dans  $H_{n_1}^2 \ominus z^{M+1}H_{n_1}^2$ .

La démonstration se fait par récurrence en utilisant l'égalité

$$\mathcal{P}(\Theta_0 \dots \Theta_M) = \mathcal{P}(\Theta_0 \dots \Theta_{M-1}) \oplus \Theta_0 \dots \Theta_{M-1} \mathcal{P}(\Theta_M).$$

On utilise le fait suivant, aussi démontré facilement par récurrence. Soit

$$\Theta_M = \begin{bmatrix} A_M & B_M \\ C_M & D_M \end{bmatrix}$$

où  $A_M$  est à valeurs dans  $\mathbb{C}_{n_2 \times n_2}$ . Alors,  $A_M$  est un polynôme de la forme

$$A_M(z) = \alpha_M z^M + \alpha_{M-1} z^{M-1} + \dots$$

où  $\det \alpha_M \neq 0$ .

Ce fait et des remarques analogues pour les polynômes  $B_M$ ,  $C_M$ ,  $D_M$  permettent de terminer la démonstration. Les détails sont laissés au lecteur.  $\square$

THÉORÈME 2.4. — Soient  $\Theta_1$  et  $\Theta_2$  deux éléments de  $\mathcal{P}_J^{v_1}$  et  $\mathcal{P}_J^{v_2}$ . Le produit  $\Theta = \Theta_1\Theta_2$  appartient à  $\mathcal{P}_J^{v_1+v_2}$  et

$$(2.5) \quad \mathcal{P}(\Theta_1\Theta_2) = \mathcal{P}(\Theta_1) \oplus \Theta_1\mathcal{P}(\Theta_2).$$

*Démonstration.* — Par le théorème 2.1, les espaces  $\mathcal{P}(\Theta_1)$  et  $\mathcal{P}(\Theta_2)$  sont inclus isométriquement dans  $H_J^2$  et donc la somme (2.5) est bien directe et orthogonale; c'est de plus un espace de Pontryagin d'ordre  $v_1 + v_2$ . Par ailleurs, l'égalité

$$\frac{J - \Theta_1(z)\Theta_2(\omega)J\Theta_2^*(\omega)\Theta_1^*(\omega)}{\rho_\omega(z)} = \frac{J - \Theta_1(z)J\Theta_1^*(\omega)}{\rho_\omega(z)} + \Theta_1(z) \frac{J - \Theta_1(z)J\Theta_2^*(\omega)}{\rho_\omega(z)} \Theta_1^*(\omega)$$

permet de montrer que  $\mathcal{P}(\Theta_1) \oplus \Theta_1\mathcal{P}(\Theta_2)$  a le même noyau reproduisant que  $\mathcal{P}(\Theta_1\Theta_2)$ , d'où l'égalité, et on en déduit que  $\Theta_1\Theta_2$  appartient à  $\mathcal{P}_J^{v_1+v_2}$ .  $\square$

Pour conclure cette section nous donnons une interprétation de l'algorithme de Schur en utilisant les espaces à noyau reproduisant. Pour simplifier la discussion nous considérons le cas scalaire.

Soit  $s$  une fonction analytique et contractive dans le disque unité. I. Schur ([24]) associe à  $s$  une suite de fonctions  $f_0, f_1, \dots$ , par

$$(2.6) \quad \begin{aligned} f_0(z) &= s(z) \\ f_{i+1}(z) &= \frac{f_i(z) - f_i(0)}{z(1 - \overline{f_i(0)}f_i(z))}. \end{aligned}$$

Par le principe du maximum, la fonction  $f_{i+1}$  est analytique et contractive dans le disque unité si  $f_i$  l'est. Si, à un certain rang  $i$ ,  $|f_i(0)| = 1$  (et donc  $f_i(z) \equiv f_i(0)$ ), la suite s'arrête à ce rang. Sinon, la suite de fonctions est infinie.

Les nombres  $\rho_i = f_i(0)$  sont appelés les coefficients de réflexion de  $s$  et la récurrence (2.6) algorithme de Schur.

THÉOREME 2.5. — Soit  $s$  une fonction analytique et contractive dans le disque unité et soit  $B$  l'opérateur de multiplication par  $s$ , de  $H^2$  dans  $H^2$ . Soient  $\rho_0, \rho_1, \dots$  les coefficients de réflexion de  $s$  et soit  $\Theta_i(z) = H(\rho_i) \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  (où  $H(\rho_i)$  est définie par (2.3)). Le graphe de  $B^*$ ,  $\mathcal{G}(B^*)$ , est un sous-espace positif de  $H_J^2$  (avec  $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ) et

$$(2.7) \quad \mathcal{G}(B^*) = \mathcal{P}(\Theta_0) \oplus \Theta_0 \mathcal{P}(\Theta_1) \oplus \Theta_0 \Theta_1 \mathcal{P}(\Theta_2) \oplus \dots$$

si  $|\rho_i| < 1$ ,  $i = 0, \dots$ .

et

$$(2.8) \quad \mathcal{G}(B^*) = \mathcal{P}(\Theta_0) \oplus \Theta_0 \mathcal{P}(\Theta_1) \oplus \dots \oplus \Theta_0 \dots \Theta_{N_0-1} \begin{pmatrix} 1 \\ \rho_{N_0}^* \end{pmatrix} H^2$$

si  $|\rho_{N_0}| = 1$ .

Ce théorème, sous une forme un peu différente, apparaît dans [3]. L'algorithme de Schur consiste donc à décomposer le graphe de la contraction  $B^*$  en une somme orthogonale de sous-espaces de dimension 1.

Le théorème de dilatation des commutants d'opérateurs peut être vu comme le procédé inverse: étant donné  $\rho_0, \dots, \rho_M$ , ( $|\rho_i| < 1$ ,  $i = 0, \dots, M$ ) nous définissons une contraction  $A$  par son graphe

$$(2.9) \quad \mathcal{G}(A^*) = \mathcal{P}(\Theta_0 \dots \Theta_M) \\ = \mathcal{P}(\Theta_0) \oplus \Theta_0 \mathcal{P}(\Theta_1) \oplus \dots \oplus \Theta_0 \dots \Theta_{M-1} \mathcal{P}(\Theta_M)$$

et la formule

$$(2.10) \quad \mathcal{G}(B^*) = \mathcal{G}(A^*) \oplus \Theta \Theta_M \mathcal{P}(\Theta_{M+1}) \\ \oplus \Theta \Theta_M \Theta_{M+1} \mathcal{P}(\Theta_{M+2}) \oplus \dots$$

où la somme est éventuellement finie, le dernier terme étant alors  $\Theta \dots \Theta_N \begin{pmatrix} 1 \\ \rho_{N+1}^* \end{pmatrix} H^2$ ,  $|\rho_{N+1}| = 1$ , décrit toutes les extensions contractives de  $A^*$ , de  $H^2$  dans  $H^2$ , qui commutent avec  $R_0$ .

L'approche décrite dans la section suivante est une généralisation de ce procédé. Plutôt que de partir de  $M+1$  coefficients de réflexion  $\rho_0, \dots, \rho_M$  (et donc d'un élément  $\Theta = \Theta_0 \dots \Theta_M$  dans la classe  $\mathcal{P}_J^0$ )

nous partons d'un élément  $\Theta$  dans une classe  $\mathcal{P}_J^v$  et supposons que  $\mathcal{P}(\Theta)$  est un graphe d'opérateur. Définissant  $A^*$  par  $\mathcal{G}(A^*) = \mathcal{P}(\Theta)$  la formule (2.10) décrit alors toutes les extensions voulues de  $A^*$ .

### 3. Espaces d'extension.

Nous commençons par deux définitions.

**DÉFINITION 3.1.** — *Un espace de Krein canonique sera un espace de Krein dont les éléments sont des fonctions analytiques dans le disque unité et à valeurs dans  $\mathbb{C}_n$  et qui est  $R_0$ -invariant ( $R_0$  est défini en (1.7)).*

**DÉFINITION 3.2.** — *Soit  $\mathcal{K}$  un espace de Krein canonique. L'espace d'extension  $\mathcal{K}^{(1)}$  est l'ensemble des fonctions  $f$  à valeurs dans  $\mathbb{C}_n$ , analytiques dans le disque unité et telles que  $R_0 f$  appartienne à  $\mathcal{K}$ .*

Chaque élément de  $\mathcal{K}^{(1)}$  s'écrit d'une manière unique comme

$$(3.1) \quad f(z) = zg(z) + c$$

où  $g$  est dans  $\mathcal{K}$  et où  $c$  appartient à  $\mathbb{C}_n$ .

Lorsque  $\mathbb{C}_n$  est muni du produit scalaire

$$(3.2) \quad [c, c]_{\Sigma} = \text{Tr } c^* \Sigma c$$

où

$$\Sigma = \Sigma^* = \Sigma^{-1},$$

nous munissons  $\mathcal{K}^{(1)}$  du produit scalaire (en général indéfini)

$$(3.3) \quad [f, f]_{\mathcal{K}^{(1)}} = [g, g]_{\mathcal{K}} + [c, c]_{\Sigma}.$$

Soient  $\mathcal{K}_1$  et  $\mathcal{K}_2$  deux espaces de Krein canoniques, dont les éléments sont à valeurs dans  $\mathbb{C}_{n_1}$  et  $\mathbb{C}_{n_2}$  (ces derniers espaces munis du produit scalaire euclidien usuel, i.e.  $\Sigma = I$  dans (3.2)). Nous considérons un opérateur continu  $A$  de  $\mathcal{K}_1$  dans  $\mathcal{K}_2$ , tel que  $R_0 A^* = A^* R_0$  et pour lequel la forme  $[\cdot, \cdot]_{A^*}$  (définie en (1.6)) a  $v_A (< \infty)$  carrés négatifs. Lorsque  $v_A = 0$ ,  $A^*$  est donc une contraction de  $\mathcal{K}_2$  dans  $\mathcal{K}_1$ . En général, l'opérateur  $A$  lui-même ne sera pas une contraction.

Le problème posé est de caractériser tous les opérateurs continus  $B$ ,

de  $\mathcal{K}_1^{(1)}$  dans  $\mathcal{K}_2^{(1)}$ , tels que

$$(3.4) \quad R_0 B^* = B^* R_0$$

$$(3.5) \quad v_A = v_B$$

$$(3.6) \quad B^*|_{\mathcal{K}_2} = A^*.$$

En particulier, lorsque  $v_A = 0$ , nous cherchons toutes les extensions contractives de  $A^*$  (de  $\mathcal{K}_1^{(1)}$  dans  $\mathcal{K}_2^{(1)}$ ) qui commutent avec  $R_0$ . Certaines conditions, décrites maintenant, sont imposées sur  $A$  afin de résoudre ce problème.

Le graphe de  $A^*$ ,  $\mathcal{G}(A^*)$ , est un espace de fonctions analytiques à valeurs dans  $\mathbb{C}_n$ ,  $n = n_1 + n_2$ , et  $R_0$ -invariant. Nous munissons  $\mathcal{G}(A^*)$  du produit scalaire

$$(3.7) \quad [g, g]_{\mathcal{G}(A^*)} = [f, f]_{\mathcal{K}_2} - [A^*f, A^*f]_{\mathcal{K}_1}$$

où

$$g = \begin{pmatrix} f \\ A^*f \end{pmatrix}$$

est un élément du graphe, et supposons que  $\mathcal{G}(A^*)$  muni du produit scalaire (3.7) est un espace de Pontryagin à noyau reproduisant dont le noyau reproduisant est de la forme (1.8) (1.9), la fonction  $\Theta$  (notée  $\Theta_A$ ), satisfaisant de plus les hypothèses  $H1$  et  $H2$ . La transformation  $A$  sera alors appelée une *transformation de Schur*.

Ces hypothèses impliquent en particulier les inclusions (non isométriques)  $\mathcal{K}_1 \subset H_{n_1}^2$  et  $\mathcal{K}_2 \subset H_{n_2}^2$ .

Pour une transformation de Schur,  $\mathcal{G}(A^*)$  est donc un espace de Krein canonique inclus dans  $H_J^2$  et le produit scalaire (3.7) coïncide avec le produit scalaire de  $H_J^2$ .

En particulier

$$[f, f]_{\mathcal{K}_2} - [A^*f, A^*f]_{\mathcal{K}_1} = \langle f, f \rangle_{H_{n_2}^2} - \langle A^*f, A^*f \rangle_{H_{n_1}^2}.$$

**THÉORÈME 3.1.** — Soit  $A$  une transformation de Schur et soit  $B^*$  une extension de  $A^*$  qui satisfasse aux conditions (3.4)-(3.6). Le graphe de  $B^*$  est invariant pour  $R_0$  et il existe un élément  $p$  de  $\mathbb{C}_{n_2 \times n_1}$ ,  $\|p\| \leq 1$ ,

tel que

$$(3.8) \quad \mathcal{G}(B^*) = \mathcal{G}(A^*) \oplus \Theta_A \begin{pmatrix} \mathbb{C}_{n_2} \\ \rho^* \mathbb{C}_{n_2} \end{pmatrix}.$$

Si  $\|\rho\| < 1$ ,  $B^*$  est à nouveau une transformation de Schur et

$$(3.9) \quad \Theta_B(z) = \Theta_A(z) H(\rho) \begin{pmatrix} zI_{n_2} & 0 \\ 0 & I_{n_1} \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, soit  $\|\rho\| \leq 1$  et soit  $\mathcal{G}$  l'espace défini par le côté droit de (3.8).  $\mathcal{G}$  est le graphe d'un opérateur  $B^*$  qui satisfait aux conditions (3.4)-(3.6).

*Démonstration.* — Nous démontrons d'abord que l'espace d'extension de  $\mathcal{P}(\Theta_A)$  est égal à  $\mathcal{P}(\Theta_A) \oplus \Theta_A \mathbb{C}_n$  ( $n = n_1 + n_2$ ). En effet,  $(R_0 \Theta_A)c$  appartient à  $\mathcal{P}(\Theta_A)$  pour tout  $c$  dans  $\mathbb{C}_n$  (théorème 6.9, [3]) et donc tout élément de la forme  $f + \Theta_A c$ ,  $f \in \mathcal{P}(\Theta_A)$ ,  $c \in \mathbb{C}_n$ , est dans l'espace d'extension. Réciproquement, soit  $g(z) = zf(z) + c$  un élément de l'espace d'extension. Utilisant la décomposition (2.2), il existe  $v$  dans  $H_J^2$  et  $u$  dans  $\mathcal{P}(\Theta_A)$  tels que

$$zf(c) + c = u(z) + \Theta_A(z)v(z)$$

et donc

$$f(z) = (R_0 u)(z) + (R_0 \Theta_A)(z)v(0) + \Theta_A(z)(R_0 v)(z).$$

La fonction  $\Theta_A R_0 v$  est ainsi dans  $\mathcal{P}(\Theta_A)$  et égale à zéro :  $v$  est donc un vecteur constant, ce qui conclut la caractérisation de  $(\mathcal{P}(\Theta_A))^{(1)}$ .

Soit maintenant  $B^*$  une extension de  $A^*$  satisfaisant les conditions (3.4)-(3.6). Le graphe de  $B^*$  est un sous-espace de  $(\mathcal{P}(\Theta_A))^{(1)}$ . De plus, puisque  $v_A = v_B$ ,  $\mathcal{G}(B^*) \cap \Theta_A \mathbb{C}_n$  est un sous-espace positif de  $(\mathcal{P}(\Theta_A))^{(1)}$ . La représentation (3.8) s'en déduit aisément.

Lorsque  $\|\rho\| < 1$ , nous avons vu dans la section 2 que l'espace  $\begin{pmatrix} \mathbb{C}_{n_2} \\ \rho^* \mathbb{C}_{n_2} \end{pmatrix}$  muni de la norme de  $H_J^2$ , est un espace  $\mathcal{P}(\Theta_0)$ ,  $\Theta_0$  étant donné par la formule (2.3).

Utilisant le théorème 2.4, nous pouvons écrire

$$\mathcal{P}(\Theta_B) = \mathcal{P}(\Theta_A) \oplus \Theta_A \mathcal{P}(\Theta_0)$$

où  $\Theta_B$  est définie par (3.9), et donc  $\mathcal{G}(B^*) = \mathcal{P}(\Theta_B)$ .



Réciproquement, soit  $\rho$  un élément de  $\mathbb{C}_{n_2 \times n_1}$  de norme inférieure à l'unité. Le côté droit de (3.8) définit bien un graphe d'opérateur  $B^*$ .

En effet, supposons  $\begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} = \Theta_A \begin{pmatrix} c \\ \rho^* c \end{pmatrix}$  pour  $c$  dans  $\mathbb{C}_{n_2}$ .

On en déduit

$$\left[ \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \right]_{H_J^2} = \left[ \Theta_A \begin{pmatrix} c \\ \rho^* c \end{pmatrix}, \Theta_A \begin{pmatrix} c \\ \rho^* c \end{pmatrix} \right]_{H_J^2}$$

où

$$- \|v\|_{H_{n_1}^2}^2 = c^*(I - \rho\rho^*)c \geq 0$$

qui entraîne  $v = 0$ .

Il est aisé de voir que  $B^*$  satisfait alors aux conditions (3.4)-(3.6).  $\square$

#### 4. Le théorème de dilatation des commutants d'opérateurs.

Le théorème 3.1 peut être itéré lorsque  $\|\rho\| < 1$  dans (3.8) et il en résulte une version du théorème de dilatation des commutants d'opérateurs.

Nous définissons d'abord le  $p$ -ième espace d'extension  $\mathcal{K}^{(p)}$  d'un espace de Krein canonique par récurrence par

$$\begin{aligned} \mathcal{K}^{(2)} &= (\mathcal{K}^{(1)})^{(1)} \\ &\vdots \\ \mathcal{K}^{(p)} &= (\mathcal{K}^{(p-1)})^{(1)}. \end{aligned}$$

Le produit scalaire sur  $\mathcal{K}^{(p)}$  est défini par (3.3) par itération.

Le  $p$ -ième espace d'extension de  $\mathcal{P}(\Theta_A)$  est

$$\mathcal{P}(\Theta_A)^{(p)} = \mathcal{P}(\Theta_A) \oplus \Theta_A \mathbb{C}_n \oplus \Theta_{AZ} \mathbb{C}_n \oplus \cdots \oplus \Theta_{AZ^p} \mathbb{C}_n$$

où  $n = n_1 + n_2$ , et est donc inclus isométriquement dans  $H_J^2$ .

Nous cherchons des extensions  $X^*$ , de  $\mathcal{K}_2^{(p)}$  dans  $\mathcal{K}_1^{(p)}$ , de  $A^*$  qui commutent avec  $R_0$  et telles que la forme hermitienne  $[\cdot, \cdot]_{X^*}$

$$[f, g]_{X^*} = [f, g]_{\mathcal{K}_2^{(p)}} - [X^* f, X^* g]_{\mathcal{K}_2^{(p)}}$$

a  $v_A$  carrés négatifs.

Les extensions seront construites par itération, en supposant que pour chaque  $p$ , le graphe de  $X^*$  muni de  $[\cdot, \cdot]_{X^*}$  est non dégénéré.

Nous définissons  $\mathcal{P}(\Theta_A)^{(\infty)} = H_J^2$ ,  $\mathcal{K}_1^{(\infty)} = H_{n_1}^2$  et  $\mathcal{K}_2^{(\infty)} = H_{n_2}^2$ . Il est à noter que  $\mathcal{K}_1^{(\infty)}$  et  $\mathcal{K}_2^{(\infty)}$  ne sont pas munis des produits scalaires euclidiens en général.

Plus précisément, soient  $v_2$  et  $v_1$  deux éléments de  $H_{n_2}^2$  et  $H_{n_1}^2$  et soit

$$\begin{pmatrix} v_2 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_2 \\ f_1 \end{pmatrix} + \Theta_A \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \end{pmatrix}$$

la décomposition de  $\begin{pmatrix} v_2 \\ v_1 \end{pmatrix}$  suivant (2.2).

Nous avons

$$[v_2, v_2]_{\mathcal{K}_2^{(\infty)}} = [f_2, f_2]_{\mathcal{K}_2} + \langle u_2, u_2 \rangle_{H_{n_2}^2}$$

et similairement pour  $\mathcal{K}_1^{(\infty)}$ .

Notons que

$$[v_2, v_2]_{\mathcal{K}_2^{(\infty)}} - [v_1, v_1]_{\mathcal{K}_1^{(\infty)}} = \langle v_2, v_2 \rangle_{H_{n_2}^2} - \langle v_1, v_1 \rangle_{H_{n_1}^2}.$$

**THÉOREME 4.1.** — Soient  $\mathcal{K}_1$  et  $\mathcal{K}_2$  deux espaces de Krein canoniques (dont les éléments sont à valeurs dans  $\mathbb{C}_{n_1}$  et  $\mathbb{C}_{n_2}$ ). Soit  $A$  une transformation de Schur de  $\mathcal{K}_1$  dans  $\mathcal{K}_2$  telle que la forme hermitienne  $[f, g] - [A^*f, A^*g]_{\mathcal{K}_1}$  ait  $\nu_A (< \infty)$  carrés négatifs et soit  $\Theta_A$  la fonction de  $\mathcal{P}_J^A$  associée. Soit  $\rho_0, \dots$  une suite d'éléments de  $\mathbb{C}_{n_2 \times n_1}$  de normes strictement inférieures à l'unité. Alors

$$(4.1) \quad \mathcal{G} = \mathcal{P}(\Theta_A) \oplus \Theta_A \mathcal{P}(\Theta_0) \oplus \Theta_A \Theta_0 \mathcal{P}(\Theta_1) \oplus \dots$$

où  $\Theta_i(z) = H(\rho_i) \begin{pmatrix} zI_{n_2} & 0 \\ 0 & I_{n_1} \end{pmatrix}$ , est le graphe d'une transformation  $B^*$  de  $H_{n_2}^2$  dans  $H_{n_1}^2$ , qui commute avec  $R_0$ , qui est une extension de  $A^*$  et telle que la forme hermitienne  $[f, g]_{\mathcal{K}_2^{(\infty)}} - [B^*f, B^*g]_{\mathcal{K}_2^{(\infty)}}$  a  $\nu_A$  carrés négatifs.

Réciproquement, soit  $B^*$  une telle extension. Si la restriction du graphe de  $B^*$  est non dégénérée de  $\mathcal{K}_1^{(p)}$  dans  $\mathcal{K}_2^{(p)}$  pour tout  $p$ , alors le graphe de  $B^*$  est de la forme (4.1).

*Démonstration.* — Soit  $\mathcal{G}_N$  l'espace défini par

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_N &= \mathcal{G}(A^*) \oplus \Theta_A \mathcal{P}(\Theta_0) \dots \oplus \Theta_A \Theta_0 \dots \Theta_{N-1} \mathcal{P}(\Theta_N) \\ &= \mathcal{G}(A^*) \oplus \Theta_A \mathcal{P}(\Theta_0 \dots \Theta_N).\end{aligned}$$

Nous avons

$$\mathcal{G}_N \subset \mathcal{P}(\Theta_A)^{(N)}.$$

Soit  $K_N$  la contraction définie par le théorème 2.3 telle que

$$\mathcal{P}(\Theta_0 \dots \Theta_N) = \mathcal{G}(K_N)$$

et  $K$  l'opérateur défini par

$$K|_{H^2_{n_2} \ominus z^{N+1} H^2_{n_2}} = K_N.$$

Il est aisé de voir que  $K$  est une contraction de  $H^2_{n_2}$  dans  $H^2_{n_1}$  et que le graphe de  $K$  est

$$\mathcal{P}(\Theta_0) \oplus \Theta_0 \mathcal{P}(\Theta_1) \oplus \dots$$

et on en déduit que  $\mathcal{G}$  est le graphe d'un opérateur borné, que nous noterons  $B^*$ .

De l'égalité

$$\mathcal{G}(B^*) = \mathcal{G}(A^*) \oplus \Theta_A \mathcal{G}(K)$$

nous déduisons que  $v_B = v_A$ .

Il reste à montrer que  $B^*$  commute avec l'opérateur  $R_0$ . Soit  $B_N^*$  l'opérateur défini par

$$\mathcal{G}(B_N^*) = \mathcal{G}_N.$$

Utilisant le fait que  $(R_0 \Theta_A)c$  appartient à  $\mathcal{P}(\Theta_A)$  pour tout  $c \in \mathbb{C}$  nous avons

$$B_N^* R_0 = R_0 B_N^*$$

et le résultat pour  $B_N$  s'en déduit par passage à la limite.

Démontrons maintenant la réciproque. Soit  $B^*$  une extension de  $A^*$  de  $H^2_{n_2}$  dans  $H^2_{n_1}$  et soit  $B_1^*$  la restriction de  $B^*$  de  $\mathcal{K}_2^{(1)}$  dans  $\mathcal{K}_1^{(1)}$ . Par hypothèse, le graphe de  $B_1^*$  est non dégénéré et par le théorème 3.1,

$$\mathcal{G}(B_1^*) = \mathcal{G}(A^*) \oplus \Theta_A \mathcal{P}(\Theta_0)$$

où  $\Theta_0$  est définie par (2.3).

Puisque le graphe de la restriction de  $B^*$  à  $\mathcal{K}_2^{(p)}$  est non dégénéré pour tout  $p > 0$  on en déduit l'égalité (4.1) par itération.  $\square$

Montrons que le théorème 4.1 correspond au théorème de dilatation des commutants d'opérateurs lorsque les espaces  $\mathcal{K}_1$  et  $\mathcal{K}_2$  sont inclus isométriquement dans  $H^2$  (muni du produit scalaire euclidien). L'opérateur  $A$  est une contraction de  $\mathcal{K}_1$  dans  $\mathcal{K}_2$  dont l'adjoint commute avec  $R_0$  et, dans (1.1) nous prenons  $T = R_0^*$ ,  $T' = R_0^*$  (respectivement dans  $\mathcal{L}(\mathcal{K}_1)$  et  $\mathcal{L}(\mathcal{K}_2)$ ). Par le théorème 4.1 il existe (au moins) une contraction  $B$  de  $H^2$  dans  $H^2$  telle que  $B^*R_0 = R_0B^*$  et  $P_{\mathcal{K}_2}B^* = A^*$ . Il nous faut montrer que l'opérateur  $R_0^*$ , de  $H^2$  dans  $H^2$  (qui n'est autre que la multiplication par  $z$ ) est la dilatation isométrique minimale de  $T$ , c'est-à-dire

$$H^2 = \bigvee_0^\infty (R_0^*)^N \mathcal{K}_2$$

où le symbole  $\bigvee$  désigne la fermeture dans  $H^2$  de l'espace engendré par les espaces  $(R_0^*)^N \mathcal{K}_2$ ,  $N = 0, \dots$

Par le théorème de Beurling Lax ([20]) il existe une fonction intérieure  $\Xi_2$  telle que

$$\mathcal{K}_2 = H^2 \ominus \Xi_2 H^2$$

et il s'agit donc de montrer que

$$H^2 = \bigvee_0^\infty z^N (H^2 \ominus \Xi_2 H^2).$$

L'ensemble des éléments de  $H^2$  orthogonaux à tous les  $z^N (H^2 \ominus \Xi_2 H^2)$  est  $R_0$  invariant et donc de la forme  $H^2 \ominus \Xi H^2$  où  $\Xi$  est une fonction intérieure. On en déduit l'égalité

$$(4.2) \quad \Xi H^2 = \bigvee_0^\infty z^N (H^2 \ominus \Xi_2 H^2).$$

Dans (4.2), le membre de droite est  $R_0$  invariant alors que le membre de gauche n'est  $R_0$  invariant que si  $\Xi$  est une constante.

### 5. Remarques.

Le théorème précédent peut se généraliser dans plusieurs directions que nous indiquons brièvement. Nous distinguerons deux voies possibles de généralisation.

- a) Affaiblissement des contraintes sur l'extension  $B^*$ ,
- b) Affaiblissement des hypothèses sur l'opérateur  $A^*$ .

Considérons la première possibilité. Soient  $\mathcal{K}_1$  et  $\mathcal{K}_2$  deux espaces de Krein canoniques et  $A$  un opérateur continu de  $\mathcal{K}_1$  dans  $\mathcal{K}_2$  dont l'adjoint commute avec  $R_0$  et soit  $v_A$  le nombre de carrés négatifs de la forme  $[\cdot]_{A^*}$ . Nous cherchons tous les opérateurs  $B$ , de  $\mathcal{K}_1^{(p)}$  dans  $\mathcal{K}_2^{(p)}$  dont l'adjoint commute avec  $R_0$ , est un prolongement de  $A^*$  et est tel que  $v_B$  soit fini.

**THÉORÈME 5.1.** — *Soit  $A$  une transformation de Schur et  $\Theta_A \in \mathcal{P}_J^{\vee A}$  la fonction telle que  $\mathcal{G}(A^*) = \mathcal{P}(\Theta_A)$ . Soit  $\Theta$  un élément de  $\mathcal{P}_J^{\vee}$  et supposons que  $\mathcal{P}(\Theta)$  soit un graphe d'opérateur. L'espace*

$$\mathcal{G} = \mathcal{P}(\Theta_A \Theta)$$

*est le graphe d'une extension  $B^*$  de  $\mathcal{K}_2^{(p)}$  dans  $\mathcal{K}_1^{(p)}$ , telle que  $v_B = v_A + v$ .*

*Soient  $\rho_0, \rho_1, \dots$  une suite d'éléments strictement contractifs de  $\mathbb{C}_{n_2 \times n_1}$ .*

*L'espace*

$$\mathcal{G} = \mathcal{P}(\Theta_A) \oplus \Theta_A \mathcal{P}(\Theta) \oplus \Theta_A \Theta \mathcal{P}(\Theta_0) \oplus \Theta_A \Theta \Theta_0 \mathcal{P}(\Theta_1) \oplus \dots$$

*est le graphe d'une extension de  $A^*$  de  $H_{n_2}^2$  dans  $H_{n_1}^2$  telle que  $v_B = v + v_A$ .*

La description de toutes les extensions semble liée au problème de la structure des fonctions de  $\mathcal{P}_J^{\vee}$ . Pour  $v > 0$ , (voir [3], [4]), il existe une théorie de la factorisation des éléments rationnels de  $\mathcal{P}_J^{\vee}$  mais la description des facteurs élémentaires (l'analogue des fonctions (2.3)) reste à faire.

La preuve du théorème 5.1 est analogue à celle du théorème 4.1 et sera omise. Mentionnons seulement que l'on fait usage du théorème 2.4.

Un théorème très général de dilatation des commutants d'opérateurs correspondrait au cas où les hypothèses sur l'opérateur  $A$  sont affaiblies. L'idée est de considérer des espaces de Krein  $\mathcal{K}_1$  et  $\mathcal{K}_2$ ,  $R_0$  invariants, dont les fonctions sont analytiques dans un voisinage de l'origine et non plus dans tout le disque unité. Soit  $A$  un opérateur borné de  $\mathcal{K}_1$  dans  $\mathcal{K}_2$  dont l'adjoint commute avec  $R_0$ , et  $\mathcal{G}(A^*)$  le graphe de  $A^*$ . Nous supposons que le graphe  $\mathcal{G}(A^*)$ , muni d'un produit scalaire  $[\cdot, \cdot]$  (a priori différent de  $[\cdot, \cdot]_{A^*}$ ) est un espace de Pontryagin à noyau reproduisant dont le noyau est de la forme (1.8). La matrice  $J$  est maintenant une matrice de signature quelconque, c'est-à-dire satisfaisant  $J = J^* = J^{-1}$  et la fonction  $\Theta$  dans (1.8) ne satisfait plus aux hypothèses  $H1$  et  $H2$ .

Un exemple d'opérateur satisfaisant à ces conditions apparaît dans [2] pour  $J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$ .

Nous espérons étudier cette situation dans une prochaine publication. Un outil important pour une telle étude, qui n'apparaît pas dans cet exposé, est la théorie de la complémentation ([14]).

*Remerciements.* Ce travail m'a été suggéré par le professeur Louis de Branges lors d'un séjour à Purdue University en mars 1988. Je remercie le professeur de Branges pour son invitation et pour les nombreuses discussions relatives à cette recherche.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] D. ALPAY, Some Krein spaces of analytic functions and an inverse scattering problem, *Michigan Math. J.*, 34 (1987), 349-359.
- [2] D. ALPAY et H. DYM, Hilbert spaces of analytic functions, inverse scattering, and operator models I, *Integral Equations and operator Theory*, 7 (1984), 589-641.
- [3] D. ALPAY et H. DYM, On applications of reproducing kernel spaces to the Schur algorithm and rational  $J$ -unitary factorization, *Operator Theory: Advances and Applications* 18, Birkhäuser Verlag, Basel, 1986, 89-159.
- [4] D. ALPAY et I. GOHBERG, Unitary rational matrix functions (à paraître).
- [5] N. ARONSZAJN, Theory of reproducing kernels, *Trans. amer. Math. Soc.*, 68 (1950), 337-404.
- [6] Gr. ARSENE, Z. CEAUSESCU et C. FOIAS, On intertwining dilations VIII, *Journal of Operator Theory*, 4 (1980), 55-91.

- [7] Gr. ARSENE, T. CONSTANTINESCU et A. GHEONDEA, Lifting of operators and prescribed numbers of negative squares, *Michigan Math. J.*, 34 (1987), 201-216.
- [8] Gr. ARSENE et A. GHEONDEA, Completing matrix contractions, *Journal of Operator Theory*, 7 (1982), 179-189.
- [9] J. BALL, Models for non contractions, *J. Math. Analysis Appl.*, 52 (1975), 235-254.
- [10] J. BALL et J. W. HELTON, A Beurling Lax Theorem for the Lie Group  $U(m, n)$  which contains most classical interpolation theory, *J. Operator Theory*, 9 (1983), 107-242.
- [11] J. BOGNAR, Indefinite inner product spaces, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*, Band 78, Springer Verlag, 1974.
- [12] L. DE BRANGES, *Espaces Hilbertiens de fonctions entières*, Masson, 1972.
- [13] L. DE BRANGES, Some Hilbert spaces of analytic functions I, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 106 (1963), 445-468.
- [14] L. DE BRANGES, Square Summable Power Series, Preprint (1988).
- [15] M. S. BRODSKII, Triangular and Jordan representations of linear operators, *Trans. Math. Monographs*, 32, Amer. Math Soc., Providence, RI., 1971.
- [16] Ph. DELSARTE, Y. GENIN et Y. KAMP, Pseudo Carathéodory functions and hermitian Toeplitz matrices, *Phillips J. Research*, 41 (1986), 1-54.
- [17] M. DRITCHEL, A lifting theorem for bicontractions in Krein spaces, Preprint, Université de Virginie, Charlottesville, 1988.
- [18] C. FOIAS et A. FRAZHO, On the Schur representation in the commutant lifting theorem, I, *Operator Theory : advances and applications*, 18 (1986), Birkhäuser Verlag, Basel, 1986, 207-217.
- [19] A. FRAZHO, Three inverse scattering algorithms for the lifting theorem, *Operator Theory : Advances and applications*, 18, Birkhäuser Verlag, Basel 1986, 218-248.
- [20] K. HOFFMAN, *Banach spaces of analytic functions*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1962.
- [21] V.P. POTAPOV, The multiplicative structure of  $J$ -contractive matrix functions, *Amer. Math. Soc. Trans.*, 15 (1960), 131-243.
- [22] M. ROSENBLUM et J. ROVNYAK, *Hardy classes and operator theory*, Oxford University Press, 1986.
- [23] D. SARASON, Generalized interpolation in  $H^\infty$ , *Trans. Amer. Math. Soc.*, 127 (1967), 179-203.
- [24] J. SCHUR, Über Potenzreihen, die in Innern des Einheitskreises beschränkt sind, *J. Reine Angew. Math.*, 117 (1917), 205-232. (Traduction anglaise dans *Operator Theory : Advances and applications* 18, Birkhäuser Verlag, Basel, 1986, 31-59.)
- [25] P. SORJONEN, Pontryagin Räume mit einem reproduzierenden Kern, *Ann. Acad. Sci. Fenn Ser A., I Math.*, 594 (1975), 1-30.

- [26] B. Sz-NAGY et C. FOIAS, Commutants de certains opérateurs, Acta Sci., Math. (Szeged), 29 (1968), 1-17.
- [27] B. Sz-NAGY et C. FOIAS, Dilatation des commutants d'opérateurs, C.R. Acad. Sci. Paris, Série A, 266 (1968), 493-495.
- [28] B. Sz-NAGY et C. FOIAS, Harmonic analysis of operators on Hilbert space, North Holland, New York, 1970.

Manuscrit reçu le 23 septembre 1988.

Daniel ALPAY,  
Département de Mathématiques  
Université de Groningue  
P.O.B. 800  
9700 AV Groningue (Pays-Bas)  
&  
Dept. of Theoretical Mathematics  
Weizman Institute  
76100 Rehovot (Israël).